ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ
НА ИТОГОВОЙ АТТЕСТАЦИИ (№ 17)

1. **15 января планируется взять кредит в банке на сумму 1,8 млн. рублей на 24 месяца. Условия его возврата таковы:**
   - **1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца,**
   - **Со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга,**
   - **15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.**

   Какую сумму нужно вернуть банку в течение первого года кредитования?

Решение. Пусть $1{,}8$ млн. рублей $=$ S млн. рублей, $2\% = r\%$.

Тогда на $\frac{S}{24}$ млн. рублей уменьшается долг каждый месяц по сравнению с долгом на 15-е число предыдущего месяца.

Имеем:

	Обоснование	Сумма, млн. рублей
1-й месяц	1-го числа долг вырос на	$\frac{r}{100}\cdot S = \frac{rS}{100}$
	Со 2-го по 14-е число клиент выплатил	$\frac{rS}{100} + \frac{S}{24}$
	Оставшаяся сумма долга на конец месяца	$S - \frac{S}{24} = \frac{23S}{24}$
2-й месяц	1-го числа долг вырос на	$\frac{r}{100}\cdot\frac{23S}{24} = \frac{23rS}{24\cdot 100}$
	Со 2-го по 14-е число клиент выплатил	$\frac{23rS}{24\cdot 100} + \frac{S}{24}$
	Оставшаяся сумма долга на конец месяца	$\frac{23S}{24} - \frac{S}{24} = \frac{22S}{24}$
3-й месяц	1-го числа долг вырос на	$\frac{r}{100}\cdot\frac{22S}{24} = \frac{22rS}{24\cdot 100}$
	Со 2-го по 14-е число клиент выплатил	$\frac{22rS}{24\cdot 100} + \frac{S}{24}$

	Оставшаяся сумма долга на конец месяца	$\frac{22S}{24}-\frac{S}{24}=\frac{21S}{24}$
…	………………………………………………..	…………………..
12-й месяц	1-го числа долг вырос на	$\frac{r}{100}\cdot\frac{13S}{24}=\frac{13rS}{24\cdot 100}$
	Со 2-го по 14-е число клиент выплатил	$\frac{13rS}{24\cdot 100}+\frac{S}{24}$
	Оставшаяся сумма долга на конец месяца	$\frac{13S}{24}-\frac{S}{24}=\frac{12S}{24}$

В течение первых 12 месяцев клиент выплатил (вернул) банку (млн. рублей)

$$\underbrace{\left(\frac{rS}{100}+\frac{S}{24}\right)+\left(\frac{23rS}{24\cdot 100}+\frac{S}{24}\right)+\left(\frac{22rS}{24\cdot 100}+\frac{S}{24}\right)+...+\left(\frac{13rS}{24\cdot 100}+\frac{S}{24}\right)}_{12\ \textit{слагаемых}}=$$

$$=\left(\underbrace{\frac{rS}{100}+\frac{23rS}{24\cdot 100}+\frac{22rS}{24\cdot 100}+...+\frac{13rS}{24\cdot 100}}_{12\ \textit{слагаемых}}\right)+\frac{12S}{24}=$$

$$=\frac{24rS+23rS+22rS+...+13rS}{24\cdot 100}+\frac{S}{2}=\frac{rS\left(24+23+22+...+13\right)}{24\cdot 100}+\frac{S}{2}=$$

$$=\frac{rS\left(24+13\right)\cdot 12}{2\cdot 24\cdot 100}+\frac{S}{2}=\frac{37rS}{4\cdot 100}+\frac{S}{2}=\frac{37rS+200S}{400}=\frac{\left(37r+200\right)S}{400}.$$

Так как $S=1{,}8$ млн. рублей, а $r=2$, то в течение 12 месяцев клиент вернёт банку $\frac{\left(37\cdot 2+200\right)\cdot 1{,}8}{400}=\frac{274\cdot 1{,}8}{400}=\frac{137\cdot 0{,}9}{100}=1{,}233$ млн. рублей.

Ответ: 1 233 000 рублей.

2. **В начале 2001 года Алексей приобрёл ценную бумагу за 11 000 рублей. В конце каждого года цена бумаги возрастает на 4000 рублей. В начале любого года Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счёт. Каждый год сумма на счёте будет увеличиваться на 10%. В начале какого года Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через 15 лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счёте была наибольшей?**

Решение. Пусть x лет Алексей будет хранить ценную бумагу, а в начале следующего года он её продаст.

Тогда $(11\,000+4000x)$ рублей будет стоить бумага в момент продажи,

$(11\,000+4000x)$ рублей – сумма на счёте в момент его открытия,

$1{,}1\cdot(11\,000+4000x)$ рублей – сумма на счёте через год,

$1{,}1^2\cdot(11\,000+4000x)$ рублей – сумма на счёте через 2 года,

$1{,}1^3\cdot(11\,000+4000x)$ рублей – сумма на счёте через 3 года,

и так далее,

$1{,}1^{15-x}\cdot(11\,000+4000x)$ рублей – сумма на счёте через 15 лет после покупки бумаги.

По смыслу задачи $0\le x<15$ (Алексей мог сразу после покупки продать ценную бумагу и положить деньги на счёт).

По условию задачи сумма на банковском счёте должна быть наибольшей.

Математическая модель задачи:

исследовать функцию $f(x)=1{,}1^{15-x}\cdot(11\,000+4000x)$ на наибольшее значение на промежутке $[0;15)$.

$$f'(x)=\left(1{,}1^{15-x}\cdot(11\,000+4000x)\right)'=$$

$$=\left(1{,}1^{15-x}\right)'\cdot(11\,000+4000x)+1{,}1^{15-x}\cdot(11\,000+4000x)'=$$

$$=1{,}1^{15-x}\ln 1{,}1\cdot(-1)\cdot(11\,000+4000x)+1{,}1^{15-x}\cdot 4000=$$

$$=1{,}1^{15-x}\left(-\ln 1{,}1\cdot(11\,000+4000x)+4000\right)=$$

$$=1{,}1^{15-x}\left(4000-\ln 1{,}1\cdot(11\,000+4000x)\right).$$

Нет таких x, при которых $f'(x)$ не существует.

$f'(x)=0$, если $1{,}1^{15-x}\left(4000-\ln 1{,}1\cdot(11\,000+4000x)\right)=0$,

$$4000-\ln 1{,}1\cdot(11\,000+4000x)=0,$$

$$11\,000+4000x=\frac{4000}{\ln 1{,}1},$$

$$4000x=4000\log_{1{,}1}e-11000,$$

$$x=\frac{4000\log_{1{,}1}e-11000}{4000},$$

$$x=\log_{1,1} e-\frac{11}{4}.$$

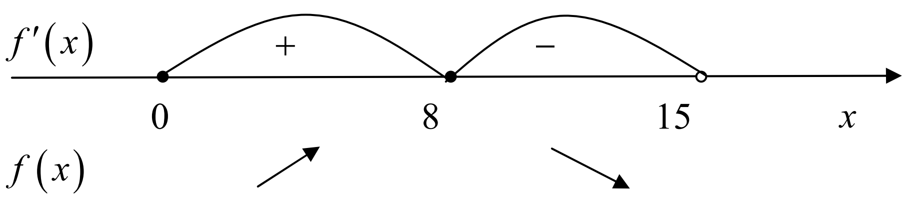
Пусть $\log_{1,1} e=m$. Тогда $1,1^m=e$. Найдём значение m так, чтобы значение выражения $\left(m-\frac{11}{4}\right)$ оказалось целым числом. Приближённые расчёты будем вести с одним десятичным знаком.

m	1	2	4	8	10	11	12
$1,1^m$	$1,1$	$1,2$	$1,4$	$2,0$	$2,4$	$2,6$	$2,8$

Получили $1,1^{11}<e=1,1^m<1,1^{12}$.

Значение выражения $\left(m-\frac{11}{4}\right)$ окажется целым числом, если $m=11\frac{3}{4}$. Тогда $x=11\frac{3}{4}-\frac{11}{4}=8.$

8 – стационарная точка функции (получена приближённо). $8\in[0;15)$.



Функция $f(x)$ на промежутке $[0;15)$ принимает наибольшее значение при $x=8$. Следовательно, 8 лет Алексей должен хранить ценную бумагу (с 2001 по 2008 год), в начале 2009-го года он должен её продать.

Ответ: в начале 2009-го года.

3. **В двух шахтах добывают алюминий и никель. В первой шахте имеется 20 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 1 кг алюминия или 2 кг никеля. Во второй шахте имеется 100 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 2 кг алюминия или 1 кг никеля. Обе шахты поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом шахты договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава ежедневно может произвести завод при таких условиях?**

Решение. Пусть ежедневно на первой шахте добывают алюминий x человек, на второй шахте добывают алюминий y человек. Тогда

$0 \le x \le 20$, $0 \le y \le 100$,

$(20 - x)$ человек добывают никель на первой шахте,

$(100 - y)$ человек добывают никель на второй шахте,

$1 \cdot 5 \cdot x$, то есть $5x$ кг алюминия добудут за день на первой шахте,

$2 \cdot 5 \cdot y$, то есть $10y$ кг алюминия добудут за день на второй шахте,

$2 \cdot 5 \cdot (20 - x)$, то есть $10(20 - x)$ кг никеля добудут за день на первой шахте,

$1 \cdot 5 \cdot (100 - y)$, то есть $5(100 - y)$ кг никеля добудут за день на второй шахте,

$(5x + 10y)$ кг алюминия поступит на завод и будет использовано для сплава,

$(10(20 - x) + 5(100 - y))$ кг никеля будет использовано для сплава.

По условию задачи в сплаве на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля.

Имеем: $5x + 10y = 2(10(20 - x) + 5(100 - y))$,

$5x + 10y = 2(200 - 10x + 500 - 5y)$,

$5x + 10y = 400 - 20x + 1000 - 10y$,

$20y = 1400 - 25x$,

$y = 70 - 1,25x$.

Тогда $5x + 10y = 5x + 700 - 12,5x = 700 - 7,5x$,

$10(20 - x) + 5(100 - y) = 200 - 10x + 500 - 5(70 - 1,25x) = 350 - 3,75x.$

$(700 - 7,5x)$ кг алюминия содержит сплав,

$(350 - 3,75x)$ кг никеля содержит сплав,

$((700 - 7,5x) + (350 - 3,75x))$, то есть $1,5(700 - 7,5x)$ кг – общая масса сплава.

По условию задачи она должна быть наибольшей.

Функция $f(x) = 1,5(700 - 7,5x)$ является убывающей.

Так как $0 \le x \le 20$, то $f_{наиб.}(x) = f(0) = 1,5(700 - 7,5 \cdot 0) = 1050$.

1050 кг сплава может произвести завод ежедневно на условиях, соответствующих тексту задачи.

Ответ: наибольшее количество сплава, производимое заводом ежедневно, равно 1050 кг.

4. **В двух областях есть по 20 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,2 кг алюминия или 0,2 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда. Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 1 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава ежедневно может произвести завод при таких условиях?**

Решение. Пусть ежедневно в первой области добывают алюминий a человек, Тогда

$(20-a)$ человек добывают никель в первой области,

$0,2\cdot 10\cdot a$, то есть $2a$ кг алюминия добудут в первой области за день,

x кг алюминия добудут во второй области за день,

$0,2\cdot 10\cdot(20-a)$, то есть $2(20-a)$кг никеля добудут за день в первой области,

y кг никеля добудут за день во второй области,

$(2a+x)$кг алюминия поступит на завод и будет использовано для сплава,

$(2(20-a)+y)$кг никеля будет использовано для сплава.

По условию задачи в сплаве на 1 кг алюминия приходится 1 кг никеля.

Имеем: $2a+x=2(20-a)+y$,

$$2a+x=40-2a+y,$$

$$4a=40-x+y.$$

Так как $2a+x=2(20-a)+y$, то общая масса сплава равна

$2(2a+x)$, то есть $(4a+2x)$ кг.

Так как $4a=40-x+y$, то общая масса сплава, производимая заводом за день, равна $(40+x+y)$ кг.

Во второй области работают 20 рабочих по 10 часов в сутки. Тогда суммарно они трудятся 200 человеко-часов.

Имеем: $x^2 + y^2 = 200$,

$y^2 = 200 - x^2$,

$y = \sqrt{200 - x^2}$, так как $0 \le y \le \sqrt{200}$ по смыслу задачи.

По смыслу задачи $0 \le a \le 20$, $0 \le x \le \sqrt{200}$, $0 \le y \le \sqrt{200}$.

Так как $y = \sqrt{200 - x^2}$, то общая масса сплава, производимая заводом за сутки, равна $\left(40 + x + \sqrt{200 - x^2}\right)$кг. По условию задачи она должна быть наибольшей.

Математическая модель задачи:

найти наибольшее значение функции $f(x) = 40 + x + \sqrt{200 - x^2}$ на отрезке $\left[0;\ \sqrt{200}\right]$.

$$f'(x) = \left(40 + x + \sqrt{200 - x^2}\right)' = 1 + \frac{-2x}{2\sqrt{200 - x^2}} = \frac{\sqrt{200 - x^2} - x}{\sqrt{200 - x^2}}.$$

На отрезке $\left[0;\ \sqrt{200}\right]$ производная $f'(x)$ не существует при $x = \sqrt{200}$.

$f'(x) = 0$, если

$$\begin{cases} \sqrt{200 - x^2} = x, \\ 0 \le x \le \sqrt{200}; \end{cases} \qquad \begin{cases} 200 - x^2 = x^2, \\ 0 \le x \le \sqrt{200}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 = 100, \\ 0 \le x \le \sqrt{200}; \end{cases} \qquad x = 10.$$

$f(0) = 40 + \sqrt{200} < f(10)$,

$f(10) = 40 + 10 + \sqrt{200 - 100} = 60 = 40 + 20 = 40 + \sqrt{400}$,

$f\left(\sqrt{200}\right) = 40 + \sqrt{200} < f(10.)$

Получили $f_{наиб} = f(10) = 60$.

60 кг сплава может производить ежедневно завод в соответствии с условием задачи.

Ответ: 60 кг сплава.