***Час занимательной математики в 8-м классе***

***«Математические софизмы»***

*Учитель Кулагина Т.В.*

*Цели:*

 Познакомить учащихся с математическими софизмами, с историей вопроса. Рассмотреть различные виды софизмов. Научить выявлять ошибки в математических софизмах. Вызвать интерес учеников к занимательной математике, к истории математики.

**«Предмет математики настолько серьёзен,**

**что полезно сделать его немного занимательным»**

**Б. Паскаль**

Сегодня мы узнаем, что такое «софизмы». 1-й слайд.

Софизм - это обман, а так как не каждый может его распознать, то с помощью софизмов люди обманывают друг друга в наше время, как и тысячелетия назад. 2-й слайд.

Софистами называли группу древнегреческих философов 4-5 века до н.э., достигших большого искусства в логике. В период падения нравов древнегреческого общества (5 век) появляются так называемые учителя красноречия, которые целью своей деятельности считали и называли приобретение и распространения мудрости, вследствие чего они именовали себя софистами. Но суть деятельности софистов много больше, чем простое обучение искусству красноречия. Они обучали и просвещали древнегреческий народ, старались способствовать достижению нравственности, присутствия духа, способности ума ориентироваться во всяком деле. Но софисты не были учеными. Умение, которое должно было быть достигнуто с их помощью, заключалось в том, что человек учился иметь в виду многообразные точки зрения. Они рассматривали самопознание человека, учили сомневаться, но все же, это очень глубокие философские проблемы, которые стали основой для мыслителей Европейской культуры. Что касается самих софизмов, то они стали как бы дополнением к софистике в целом, если рассматривать ее как истинно философское понятие.

Наиболее известна деятельность софистов Протагора из Абдебы, Горгия из Леонтип, Гиппия из Элиды и Продика из Кеоса. Наиболее уважаемым из философов, имеющих отношение к софистке, был Сократ (469-399 гг. до н. э.). Он активно участвовал в спорах и обсуждениях софистов, но вскоре стал критиковать их учение, софистику в целом. Такому же примеру последовали и его ученики Ксенофонт и Платон. 3-й слайд.

Вот один из древних софизмов («рогатый»), приписываемый Эвбулиду: «Что ты не терял, то имеешь. Рога ты не терял. Значит, у тебя рога». Здесь маскируется двусмысленность большей посылки. Если она мыслится универсальной: «Всё, что ты не терял…», то вывод логически безупречен, но неинтересен, поскольку очевидно, что большая посылка ложна; если же она мыслится частной, то заключение не следует логически. Последнее, однако, стало известно лишь после того, как Аристотель создал логику.

 А вот современный софизм, обосновывающий, что с возрастом «годы жизни» не только кажутся, но и на самом деле короче: «Каждый год вашей жизни — это её 1/n часть, где n — число прожитых вами лет. Но n +1 >n. Следовательно, 1/(n + 1)< 1/n».

**Софизмы в математике.** 4-й слайд.

 В математических софизмах чаще всего используются «запрещенные действия» либо не учитываются условия применимости теорем, формул или правил. Часто понимание людьми ошибок в софизме ведет к пониманию математики в целом, развивает логику и навыки правильного мышления. Поиск ошибки в софизме ведет к ее пониманию и осознанию, а осознавая ошибку, человек имеет больше шансов ее не допустить. Также, в истории развития математики софизмы способствовали повышению точности формулировок и более глубокому пониманию понятий математики.

Существует несколько видов математических софизмов***: логические, алгебраические, геометрические.***

5-й, 6-й слайды.

**Логические софизмы.** Один из видов математических софизмов является логический софизм. Давайте разберём их тоже на примерах:

 1) " 9 руб. = 90 000 коп."

Возьмем верное равенство: 3 р. = 300 к. и возведем его по частям в квадрат. Мы получим: 9 р. = 90 000 к. Ошибка: В этом софизме мы вспомнить, что возведение в квадрат денег не имеет смысла. В квадрат возводятся числа, а не величины.

 2) "Пять равно шести" Возьмем тождество 35+10-45=42+12-54. В каждой части этого тождества вынесем за скобки общий множитель:

 5·(7+2-9)=6·(7+2-9). Теперь, разделив обе части полученного равенства на их общий множитель (7+2-9), получим, что 5=6. Ошибка: Она допущена при делении верного равенства 5·(7+2-9)=6·(7+2-9) на число 7+2-9, равное нулю. Этого нельзя делать, так как любое равенство можно делить только на число, отличное от нуля.

3) 2 х 2 = 5 7, 8-й слайды.

 **Алгебраические софизмы.**

Алгебра возникла под влиянием нужд общественной практики, в результате поисков общих приёмов для решения однотипных арифметических задач. Приёмы эти заключаются обычно в составлении и решении уравнений. Т.е. алгебраические софизмы – намеренно скрытые ошибки в уравнениях и числовых выражениях.

 ***1)«Два неодинаковых натуральных числа равны между собой»***

Решим систему двух уравнений:

 х+2у=6, (1)

у=4- х/2 (2)

 Сделаем это подстановкой у из 2го уравнения в 1, получаем х+8-х=6, откуда 8=6 Ошибка: Уравнение (2) можно записать как х+2у=8, так что исходная система за-пишется в виде:

 Х+2у=6,

 Х+2у=8

 В этой системе уравнений коэффициенты при переменных одинаковы, а правые части не равны между собой, из этого следует, что система несовместна, т.е. не имеет ни одного решения. Графически это означает, что прямые у=3-х/2 и у=4-х/2 параллельны и не совпадают. Перед тем, как решать систему линейных уравнений, полезно проанализировать, имеет ли система единственное решение, бесконечно много решений или не имеет решений вообще.

 ***2) «Отрицательное число больше положительного»***

 Возьмем два положительных числа а и с. Сравним два отношения: а/-c и -а/c Они равны, так как каждое из них равно –(а/с). Можно составить пропорцию: a/-c=-a/c Но если в пропорции предыдущий член первого отношения больше последующего, то предыдущий член второго отношения также больше своего последующего. В нашем случае а>-с, следовательно, должно быть –а>с, т.е. отрицательное число больше положительного. Ошибка: Данное свойство пропорции может оказаться неверным, если некоторые члены пропорции отрицательны.

 **Геометрические софизмы** построены на ошибках, связанных с геометрическими фигурами и действиями над ними.

 ***1) Спичка вдвое длиннее телеграфного столба.***

 Пусть а дм - длина спички и b дм - длина столба. Разность между b и a обозначим через c . Имеем b - a = c, b = a + c. Перемножаем два эти равенства по частям, находим: b2 - ab = ca + c2. Вычтем из обеих частей bc. Получим: b2- ab - bc = ca + c2 - bc, или b(b - a - c) = - c(b - a - c), откуда b = - c, но c = b - a, поэтому b = a - b, или a = 2b. Ошибка: Ошибка заключается в том, что в выражении b(b-a-c )= -c(b-a-c) производится деление на 0

 ***2)Хорда, не проходящая через центр окружности, равна диаметру.***

 Пусть в окружности приведен диаметр АВ. Через точку В проведем любую хорду ВЕ, не проходящую через центр, затем через середину этой хорды D и точку А проведем новую хорду АС. Наконец, точки Е и С соединим отрезком прямой. Рассмотрим ∆ АВD и ∆ЕDС. В этих треугольниках: ВD = DЕ (по построению), А = Е (как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу). Кроме того, ВDА= ЕDC (как вертикальные). Если же сторона и два угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум углам другого треугольника, то такие треугольники равны. Значит, ∆ ВDА = ∆ЕDC, а в равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны. Поэтому, АВ=ЕС.

 По теореме о признаке равенства треугольника: Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны. А в нашем случае, А не прилежит к стороне ВD .

 Ошибка: Ошибка заключается в неправильном применении теоремы о равенстве треугольников (равны 2 угла, не прилежащие к одной стороне).

 **3) «Загадочный треугольник»** 9-й слайд.

 Дан прямоугольный треугольник 13\*5 клеток, составленный из четырёх фигур.



 После перестановки фигур при визуальном сохранении изначальных пропорций появляется дополнительная, не занятая ни одной частью, клетка



 Но мы же понимаем, что такого быть не может.

 Ошибка:

 

Площади закрашенных фигур, конечно, равны между собой (оба по 32 клетки), однако, то, что визуально наблюдается как треугольники 13\*5, на самом деле таковым не является, и имеет разные площади. То есть ошибка, замаскированная в условии задачи, состоит в том, что начальная фигура названа треугольником (на самом деле являющаяся вогнутым четырёхугольником). Это отчётливо заметно на рис. 2 – гипотенузы верхней и нижней фигур проходят через разные точки: (8,3) вверху и (5,2) внизу. Секрет в свойствах синего и красного треугольников. Это легко проверить вычислениями.

 Отношения длин соответствующих сторон синего и красного треугольников не равны друг другу (2\3 и 5\8), поэтому эти треугольники не являются подобными, а значит, имеют разные углы при соответствующих вершинах. Если нижние стороны этих треугольников параллельны, то гипотенузы в обоих треугольниках 13\*5 на самом деле являются ломаными линиями (на верхнем рисунке создаётся излом внутрь, а на нижнем – наружу). Если наложить верхнюю и нижнюю фигуры 13\*5 друг на друга, то между их гипотенузами образуется параллелограмм, в котором и содержится «лишняя» площадь. На рис. 3 этот параллелограмм приведён в верных пропорциях. Официальным автором этой задачи про «загадочные треугольники» является иллюзионист-любитель Пол Керри, придумавшим этот софизм в XX веке.

**Софизмы, на которые до сих пор нет ответов.**

Вот один широко известный пример. 10 слайд.

 «Ахиллес никогда не догонит черепаху». Образ Ахиллеса взят из «Илиады» Гомера, где герой Ахиллес неоднократно именуется «быстроногим». Сюжет софизма напоминает безуспешную погоню Ахиллеса за Гектором: «Гектора ж, в бегстве преследуя, гнал Ахиллес непрестанно. Словно как пёс по горам молодого гонит оленя…» Древнегреческий философ Зенон доказывал, что Ахиллес, один из самых сильных и храбрых героев, осаждавших древнюю Трою, никогда не догонит черепаху, которая, как известно, отличается крайне медленной скоростью передвижения. Вот примерная схема рассуждений Зенона. Предположим, что Ахиллес и черепаха начинают движение одновременно, и Ахиллес стремится догнать черепаху. Примем для определённости, что Ахиллес движется в 10 раз быстрее черепахи, и что их отделяют друг от друга 100 шагов. Когда Ахиллес пробежит расстояние в 100 шагов, отделяющие его от того места, откуда начала двигаться черепаха, то в этом месте он уже её не застанет, так как она пройдёт вперёд расстояние в 10 шагов. Когда Ахиллес пробежит и эти 10 шагов, то и там черепахи уже не будет, поскольку она успеет перейти на 1 шаг вперёд. Достигнув и этого места, Ахиллес опять не найдёт там черепахи, потому что она успеет пройти расстояние, равное 1/10 шага, и снова окажется несколько впереди его. Это рассуждение можно продолжать до бесконечности, и придётся признать, что быстроногий Ахиллес никогда не догонит медленно ползающую черепаху. Где ошибка? Рассматриваемый софизм Зенона даже на сегодняшний день далёк от своего окончательного разрешения. Вот некоторые его аспекты, указанные в книге Мадера А. Г., Мадера Д. А. «Математические софизмы»: «Сначала определим время t, за которое Ахиллес догонит черепаху. Оно легко находится из уравнения a+vt=wt, где a – расстояние между Ахиллесом и черепахой до начала движения, v и w – скорости черепахи и Ахиллеса соответственно. Это время при принятых в софизме условиях (v=1 шаг/сек и w=10 шагов/сек) равно 11,111111… сек. Другими словами, примерно через 11,1 сек. Ахиллес догонит черепаху. Подойдём теперь к утверждениям софизма с точки зрения математики. Проследим логику Зенона. Предположим, что Ахиллес должен пройти столько же отрезков, сколько их пройдёт черепаха. Если черепаха до момента встречи с Ахиллесом пройдёт m отрезков, то Ахиллес должен пройти те же m отрезков плюс ещё один отрезок, который разделял их до начала движения. Следовательно, мы приходим к равенству m=m+1, что невозможно. Отсюда следует, что Ахиллес никогда не догонит черепаху. Итак, путь, пройденный Ахиллесом, состоит из бесконечной последовательности отрезков, которые принимают бесконечный ряд значений. Трудности, которые возникают при оперировании понятиями «непрерывного» и «бесконечного» до сих пор не определены, а разрешение противоречий, содержащихся в них, послужило более глубокому осмыслению основ математики». В действительности, трудно представить себе Ахиллеса, бегущего расстояние в одну тысячную миллиметра. Таким образом, становится совершенно ясно, что этот софизм Зенона оказывается правильной в теории, но абсолютно неверной в практике.

11, 12-й слайд.

**Практическая часть.**

**Найдите ошибки в рассуждениях**

**10-10=0**

 15-15=0

 10-10=15-15

 2\*(5-5) = 3\*(5-5)

 2=3

**Что ты не терял, то имеешь.**

 Рога ты не терял. Значит, у тебя рога есть.

 **Дважды два - пять!**

 16 - 36 = 25 - 45; Прибавим к левой и правой части 81/4: 16 - 36 + 81/4 = 25 - 45 + 81/4; Преобразуем выражение: 4\*4 - 2\*4\*9/2 + (9/2)\*(9/2) = 5\*5 - 2\*5\*9/2 + (9/2)\*(9/2) Теперь можно заметить, что в левой и правой части выражения записаны произведения вида: a2-2ab+b2, то есть, квадрат разности: (a-b)2. В нашем случае слева a=4, b=9/2, а справа a=5, b=9/2. Поэтому перепишем выражение в виде квадратов разности: (4 - 9/2)2 = (5 - 9/2)2;А, следовательно, 4 - 9/2 = 5 - 9/2 4 = 5 или, 2\*2 = 5

 **«Полупустое есть то же, что и полу полное**.

Если равны половины, значит, равны и целые. Следовательно, пустое есть то же, что и полное».

 Возьмем верное равенство: 2 р. = 200 к. и возведем его по частям в квадрат. Мы получим: 4 р. = 40 000 к.

 **Ответы**

 1. Ошибка в том, что на нуль ( 5 – 5 ) делить нельзя.

 2. Если у тебя нет рогов, ты не сможешь их потерять.

 3. В преобразования, разумеется, закралась ошибка. А именно, при переходе из (4) в (5) совсем забыли, что равенство квадратов вовсе не означает равенство значений, возведенных в квадрат: они могут быть противоположны друг другу, как в нашем случае: 49/2 равно -1/2, а 5-9/2 равно 1/2. А квадраты этих значений одинаковы.

 4. Ясно, что приведенное рассуждение неверно, так как в нем применяется неправомерное действие: увеличение вдвое. В данной ситуации его применение бессмысленно.

 5. Здесь надо вспомнить, что возведение в квадрат денег не имеет смысла. В квадрат возводятся числа, а не величины.

 *Литература:*

 1) А.Г. Мадера, Д.А. Мадера «Математические софизмы», Москва, «Просвещение», 2003г.

2) Ф.Ф. Нагибин, Е.С. Канин «Математическая шкатулка», Москва, «Просвещение», 1988г.

 3) «Большая энциклопедия Кирилла и Мефодия» 2004г.

 4) Савин А. П. «Энциклопедический словарь юного математика», Москва, «Педагогика» 1989г.

5) ru.wikipedia.org

 6) Ахманов А. С. «Логическое учение Аристотеля»

7) Брадис В. М., Минковский В. Л., Харчева Л. К. «Ошибки в математических рассуждениях»

 8) Пельман Я. И. «Занимательная математика»

9) «Аванта +. Математика». – Москва, изд. «Аванта +»,1998

10) Игнатьев Е.И. «Математическая смекалка. Занимательные задачи, игры, фокусы, парадоксы». – Москва, изд. «Омега»,1994. 11) Лямин А. А., «Математические парадоксы и интересные задачи». –Москва, 1911