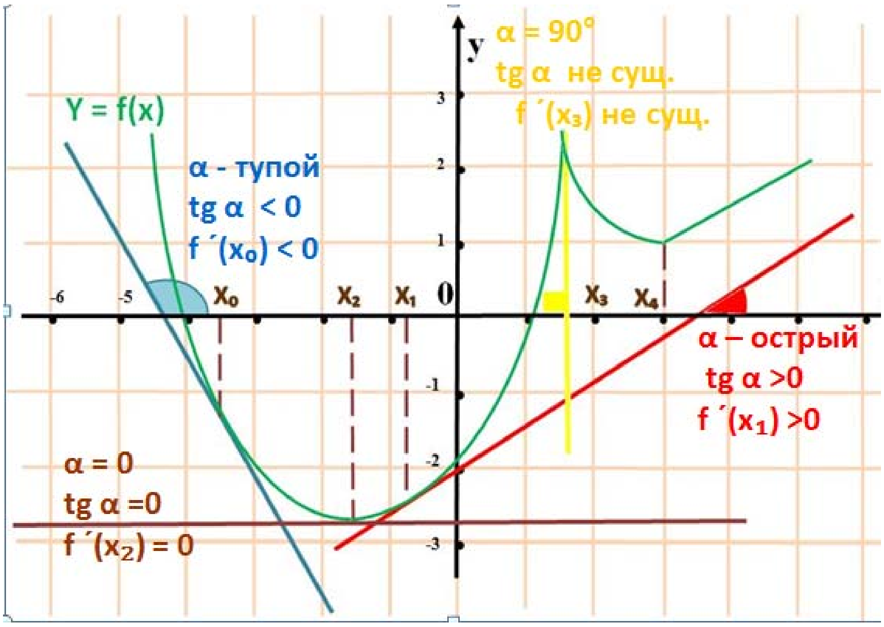
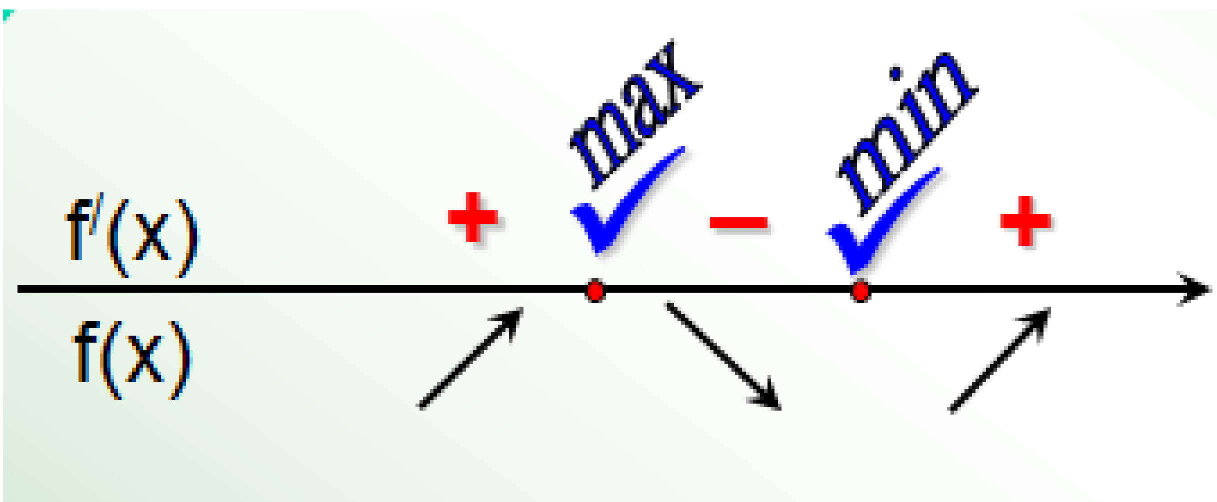
ПАМЯТКИ
по теме «ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ»



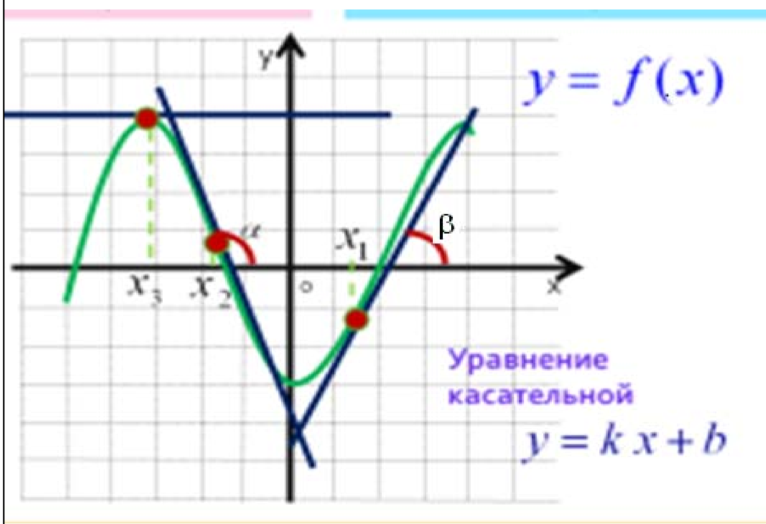


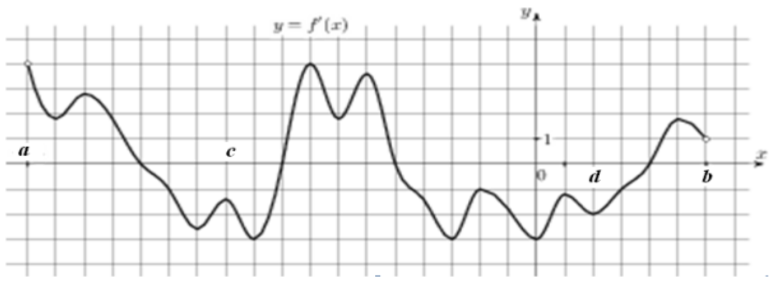
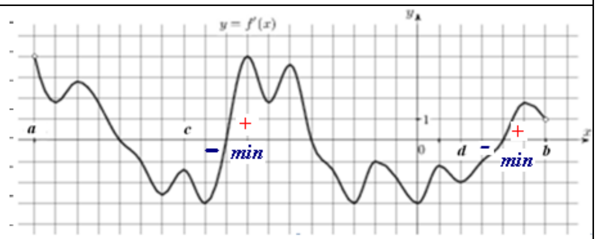
ТИПЫ ЗАДАНИЙ

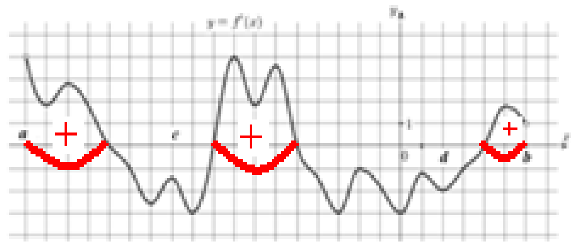
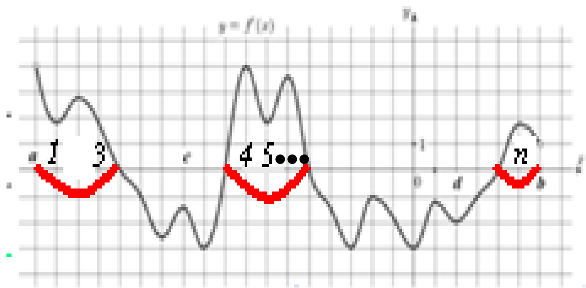
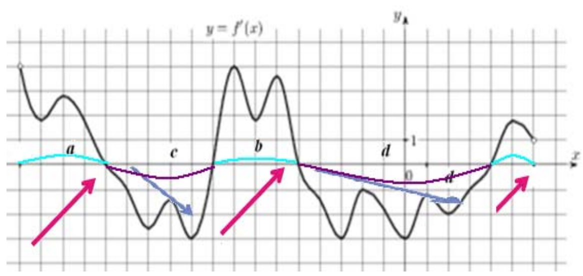
по теме «ПРОИЗВОДНАЯ»

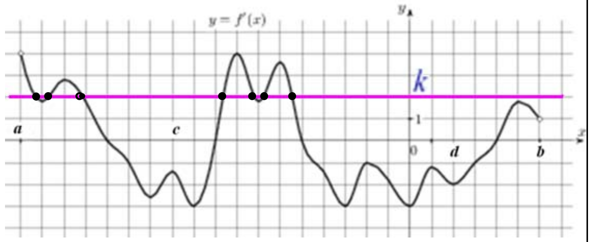
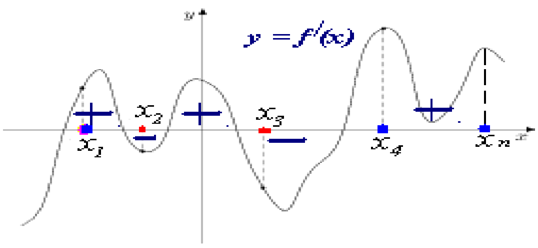
(применение геометрического и физического смысла производной, применение производной к исследованию функций)

И СПОСОБЫ ИХ РЕШЕНИЯ

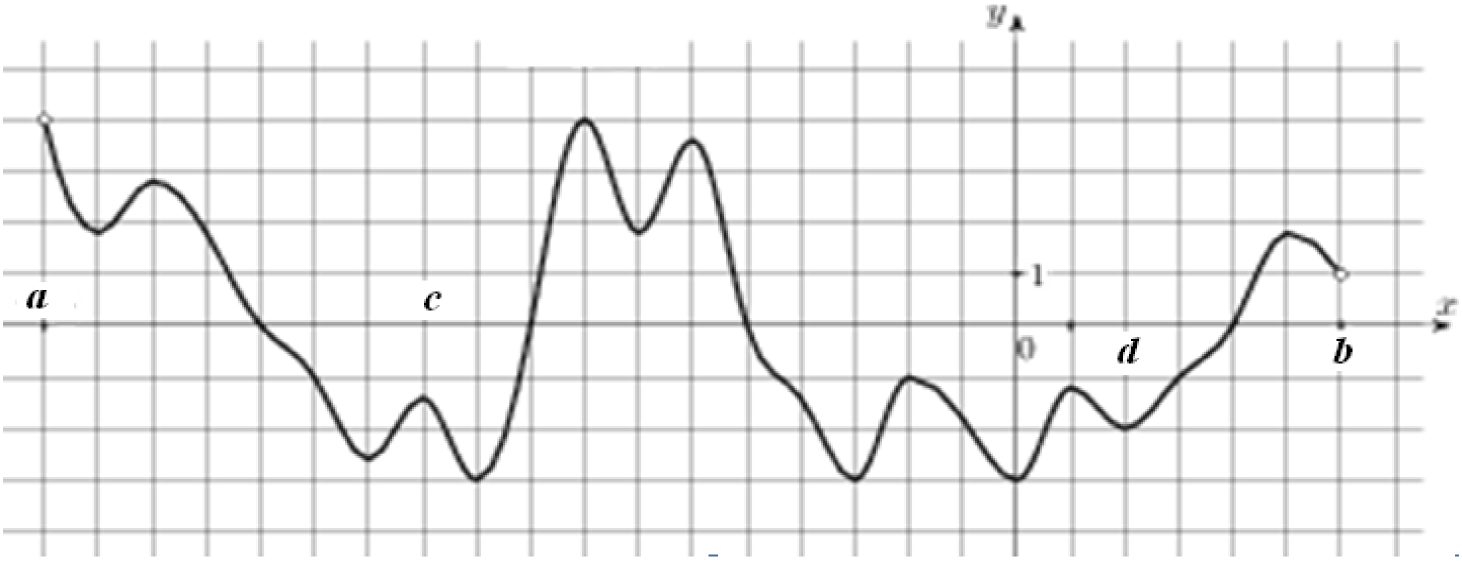
№ п\п	Тип задания	Решение в общем виде
1	На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0.  Найти значение производной $f'(x)$ в точке x_0.	• В точке $x_0=x_1$ касательная образует **острый** угол β с положительным направлением оси Ox. Тогда $$f'(x_1)=\operatorname{tg}\beta$$ *Строим прямоугольный треугольник с углом, равным* β, *и находим* $f'(x_1)=\operatorname{tg}\beta$ *как отношение противолежащего катета к прилежащему.* • В точке $x_0=x_2$ касательная образует **тупой** угол α с положительным направлением оси Ox. Тогда $$f'(x_2)=\operatorname{tg}\alpha=-\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)$$ *Строим прямоугольный треугольник с углом, равным* $(180^\circ-\alpha)$, *и находим* $f'(x_2)=-\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)$ *как отношение противолежащего катета к прилежащему, но берём отношение с противоположным знаком.* • В точке $x_0=x_3$ касательная **параллельна** оси Ox. Тогда $$f'(x_3)=\operatorname{tg}0^\circ=0.$$

2	Аналитически (с помощью формулы) заданы функция $f(x)$ и прямая $y = kx + b$, параллельная касательной к графику функции $f(x)$. Найти абсциссу x_0 точки касания.	1) Так как касательная параллельна заданной прямой, то $k_{касат.} = k_{прямой} = k$. 2) Найти производную $f'(x)$. 3) Выяснить, при каких значениях x значение производной $f'(x)$ равно k (Это и есть искомые значения x_0). *Для этого нужно решить уравнение* $$f'(x) = k.$$
3	На рисунке изображен график $f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале (a; b). 	
	а) Найдите количество точек минимума (максимума) функции $f(x)$ на промежутке • $(a; b)$, • $[c; d]$.	 На промежутке $(a; b)$ видим две точки, в которых производная меняет знак с «–» на «+». Это точки минимума. На промежуток $[c; d]$ попадает только одна из них (первая). Аналогично находят точки максимума: это точки, в которых производная меняет знак с «+» на «–».

	б) Найдите количество промежутков возрастания (убывания) функции.	 Находим количество **промежутков**, в которых $f'(x) > 0$. (Убывает – аналогичное решение, но изучаем промежутки, в которых $f'(x) < 0$).
	в) Найдите количество целых точек на промежутке $(a;b)$, в которых функция $f(x)$ возрастает (убывает).	 (Убывает – аналогичное решение, но изучаем промежутки, на которых $f'(x) < 0$).
	г) Найдите промежутки возрастания (убывания) функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего (наименьшего) из них.	 (Убывает – аналогичное решение, но изучаем промежутки, на которых $f'(x) < 0$). **Точки экстремума включаем и в промежуток возрастания функции, и в промежуток убывания.**

	д) Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = kx + q$ или совпадает с ней.	1) Так как касательная параллельна заданной прямой, то $k_{касат.} = k_{прямой} = k$. 2) Так как $k_{касат.} = k = f'(x_0)$, то искомые точки являются корнями уравнения $f'(x) = k$ (решаем его графически)  3) Определяем, сколько раз прямая $y = k$ пересекает график $y = f'(x)$.
	е) На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$ и точки x_1, x_2, x_3, x_4, …, x_n. Какие из этих точек лежат на промежутке возрастания (убывания) функции $f(x)$? В ответе укажите количество точек.	 • Если $f'(x_k) > 0$, то точка x_k лежит на промежутке возрастания функции $f(x)$. (на рисунке это точки x_1, x_4, x_n). • Если $f'(x_m) < 0$, то точка x_m лежит на промежутке убывания функции $f(x)$. (на рисунке это точки x_2, x_3).

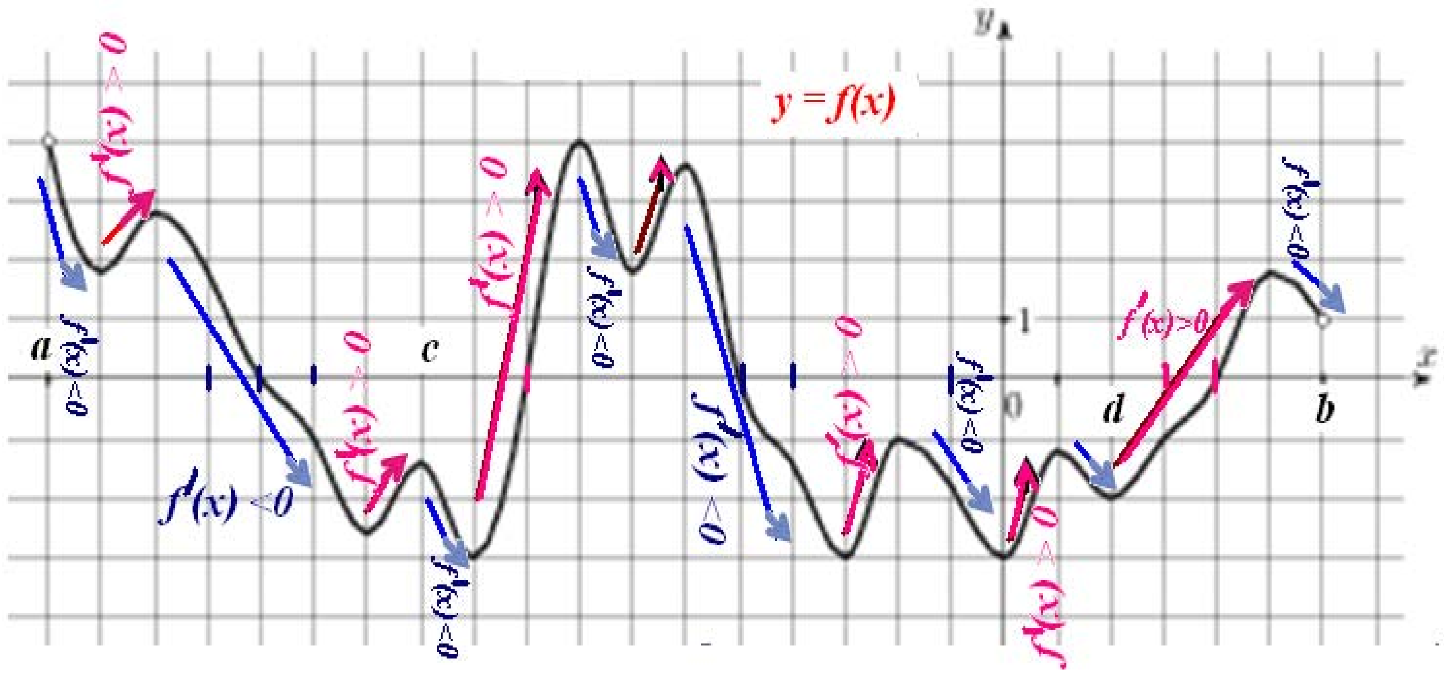
4.



Задание. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(a;b)$.

а) Определите количество (сумму, произведение) целых точек, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна (положительна).

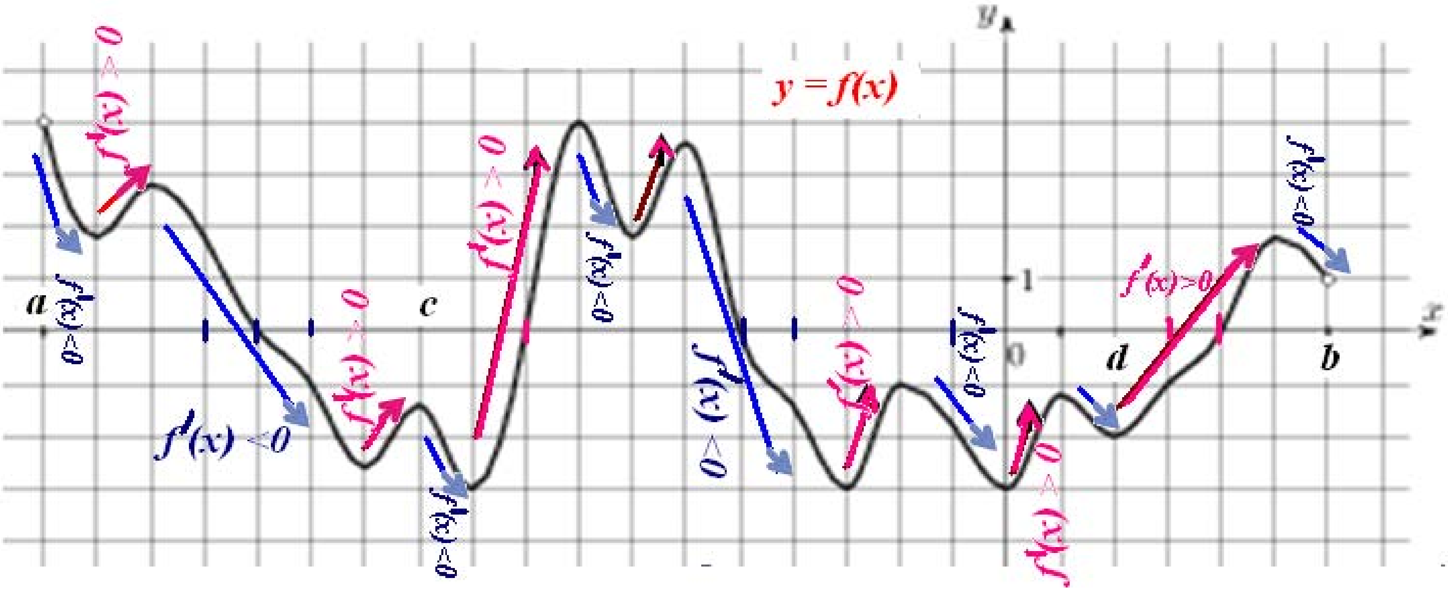
Решение в общем виде:



- Там, где производная $f'(x) < 0$, функция $f(x)$ убывает.
- Там, где производная $f'(x) > 0$, функция $f(x)$ возрастает.
  (Убывание зафиксировано на рисунке синим цветом, возрастание – красным; целые точки (значения x), в которых производная функции отрицательна, отмечены на оси Ox синим цветом (их 6), в которых $f'(x)$ положительна, – красным цветом (их 3)).

б) Найдите количество промежутков, в которых производная функции $f(x)$ положительна (отрицательна).

Решение в общем виде:



- Там, где производная $f'(x)<0$, функция $f(x)$ убывает.
- Там, где производная $f'(x)>0$, функция $f(x)$ возрастает.

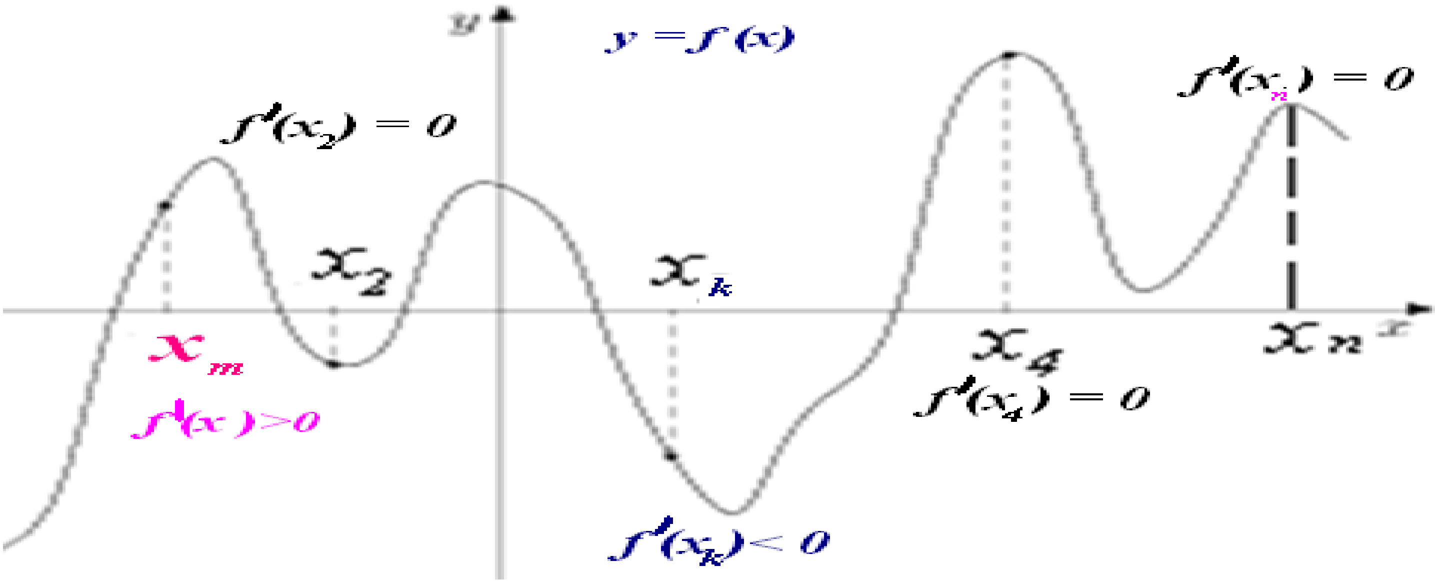
(Убывание зафиксировано на рисунке синим цветом, возрастание – красным; на рисунке видим 7 промежутков возрастания функции (следовательно, $f'(x)>0$ на 7 промежутках) и 8 промежутков убывания функции (следовательно, $f'(x)<0$ на 8 промежутках)).

5.

Задание. На рисунке изображён график функции $f(x)$ и точки x_1, x_2, x_3, x_4, …, x_n. В какой из них значение производной наименьшее (наибольшее)? В ответе укажите эту точку.

Решение в общем виде:

1-й случай:



В некоторых задачах такого типа достаточно ***проанализировать знаки производной*** в каждой точке.

Если получим *только одну* такую точку, в которой $f' < 0$, то именно ***в этой точке*** значение производной будет наименьшим (на чертеже – это точка x_k).

Если получим *только одну* такую точку, в которой $f' > 0$, то именно ***в этой точке*** значение производной будет наибольшим (на чертеже – это точка x_m).

2-й случай:

Шаг* 1. *Анализируем знаки производной в каждой точке.

Шаг* 2.** Если нужно найти точку, в которой значение производной является *наименьшим* (по сравнению со значениями в других точках), то ***отбираем все точки, в которых $f' < 0$.

Если нужно найти точку, в которой значение производной является *наибольшим* (по сравнению со значениями в других точках), то ***отбираем все точки, в которых*** $f' > 0$.

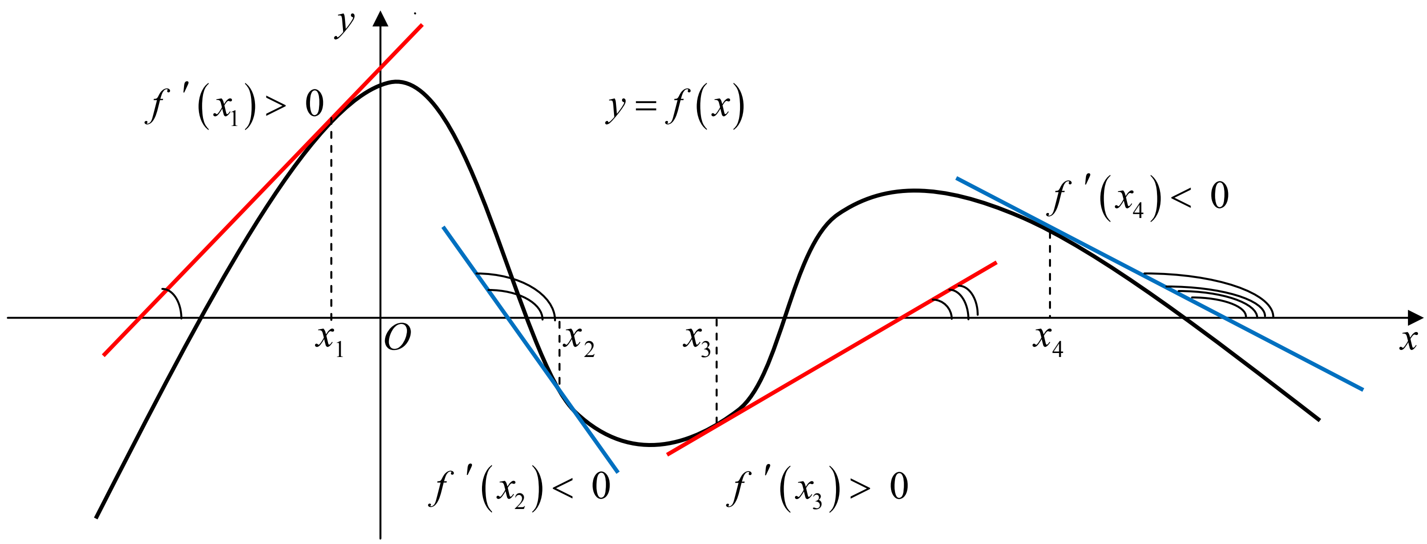
Шаг* 3.** В каждой из выбранных точек ***проводим (с помощью линейки) ***касательную к графику функции***. Обращаем внимание на угол наклона касательной.

Если ищем точку, в которой значение производной является ***наименьшим*** (по сравнению со значениями в других точках), то это точка, в которой угол наклона касательной ***МЕНЬШЕ***.

Если ищем точку, в которой значение производной является ***наибольшим*** (по сравнению со значениями в других точках), то это точка, в которой угол наклона касательной ***БОЛЬШЕ***.

ВНИМАНИЕ!!!

КАСАТЕЛЬНЫЕ НУЖНО ПРОВОДИТЬ ТОЛЬКО В ТОЧКАХ-ОТВЕТАХ ШАГА 2 (Иначе получим неправильный ответ).



На рисунке точки x_1 и x_3 расположены на интервалах возрастания функции $f(x)$, следовательно, $f'(x_1) > 0$ и $f'(x_3) > 0$.

Касательные к графику функции $y = f(x)$ в точках с абсциссами x_1 и x_3 изображены на рисунке красным цветом.

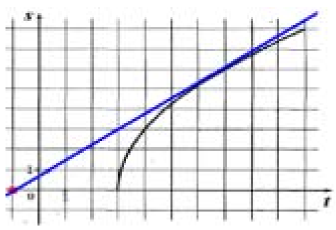
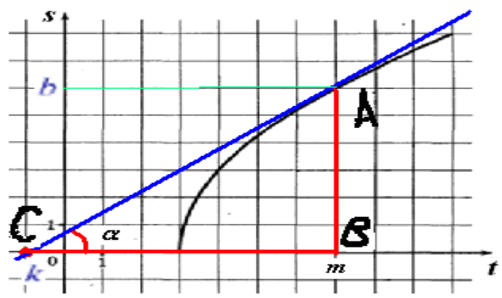
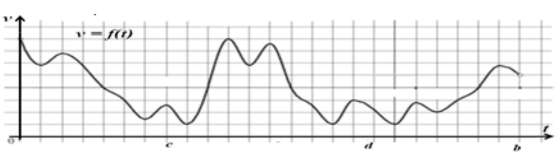
Угол наклона касательной в точке с абсциссой x_1 больше, чем угол наклона касательной в точке с абсциссой x_3.

Поэтому $f'(x_1) > f'(x_3)$.

Аналогично, $f'(x_2) < 0$ и $f'(x_4) < 0$. Меньше угол наклона касательной к графику функции в точке с абсциссой x_2. Поэтому $f'(x_2) < f'(x_4)$.

6	Дано уравнение касательной к графику квадратичной функции (например, прямая $y=-4x+6$ является касательной к графику функции $f(x)=8x^2-28x+c$). Найдите значение c.	*Шаг* 1. **Находим абсциссу точки касания.** Например, так как прямая $y=-4x+6$ касается графика функции, то $k_{касат.}=k=f'(x_0)$. Тогда $16x_0-28=-4,$ $x_0=1,5.$ *Шаг* 2. **Составляем уравнение, позволяющее найти c. Решаем его.** Суть: *в точке касания* ордината, рассчитанная по формуле, задающей функцию, равна ординате, рассчитанной по уравнению касательной. Другими словами: находим двумя способами ординату точки касания, и поскольку это одна и та же ордината, ответы приравниваем. Например, $\left.\begin{array}{l} y_0=y(1,5)=-4\cdot1,5+6=0; \\ y_0=8\cdot1,5^2-28\cdot1,5+c=-24+c \end{array}\right\vert\Rightarrow$ $\Rightarrow\ -24+c=0,$ $c=24.$
7	Дано уравнение касательной к графику квадратичной функции (например, прямая $y=-6x+7$ является касательной к графику функции $y=ax^2-2x+8$). Найдите значение a.	$a\neq0$, иначе функция приняла бы вид $y=-2x+8$, и прямая $y=-6x+7$ не могла бы оказаться касательной к заданной функции. Далее применяем алгоритм из аналогичной задачи 6. Получаем: 1) $2ax_0-2=-6, \qquad x_0=\dfrac{-2}{a};$

		2) $y_0 = y\left(\frac{-2}{a}\right) = -6\cdot\left(\frac{-2}{a}\right) + 7 = \frac{12}{a} + 7$ $y_0 = a\left(\frac{-2}{a}\right)^2 - 2\cdot\left(\frac{-2}{a}\right) + 8 = \frac{8}{a} + 8$ $\frac{12}{a} + 7 = \frac{8}{a} + 8,$ $\frac{4}{a} = 1,$ $a = 4.$
8	Дано уравнение касательной к графику квадратичной функции (например, прямая $y = 3x + \frac{5}{4}$ является касательной к графику функции $y = 3x^2 + bx + 2$). Найдите значение b, удовлетворяющее условию $b > 0$.	См. алгоритм в задаче 6. Аналогично получаем: 1) $6x_0 + b = 3,$ $x_0 = \frac{3-b}{6},$ $x_0 = \frac{1}{2} - \frac{b}{6};$ 2) $y_0 = 3\left(\frac{1}{2} - \frac{b}{6}\right)^2 + b\left(\frac{1}{2} - \frac{b}{6}\right) + 2,$ $y_0 = \frac{3}{4} - \frac{b}{2} + \frac{b^2}{12} + \frac{b}{2} - \frac{b^2}{6} + 2,$ $y_0 = \frac{11}{4} - \frac{b^2}{12},$ $y_0 = 3\left(\frac{1}{2} - \frac{b}{6}\right) + \frac{5}{4} = \frac{11}{4} - \frac{b}{2}$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow \quad \frac{11}{4} - \frac{b^2}{12} = \frac{11}{4} - \frac{b}{2},$ $b^2 - 6b = 0,$ $b = 0 \quad$ *или* $\quad b = 6.$ Так как $b > 0$, то $b = 6.$

	Физический смысл производной	
9	Материальная точка движется прямолинейно по закону $s(t)$, где s – расстояние от точки отсчета, t – время, измеренное с начала движения. **а)** Найдите её скорость в момент времени $t=m$. **б)** В какой момент времени скорость движения точки будет равна $v=p$?	**Мгновенная скорость движения точки в момент времени $t=m$:** $$v=s'(m)$$ *Шаг* 1. Находим закон изменения скорости: $v(t)=s'(t)$. **а)** *Шаг* 2. Находим скорость в момент времени $t=m$: $$v(m)=s'(m)$$ **б)** *Шаг* 2. Находим искомое время t, решая уравнение $s'(t)=p$.
10	Материальная точка движется прямолинейно по закону $s(t)$, где s – расстояние от точки отсчета, t – время, измеренное с начала движения. Найдите ее ускорение в момент времени $t=m$.	В любой момент времени $$a(t)=v'(t)=s''(t)$$ **Мгновенное ускорение точки в момент времени $t=m$:** $$a(m)=v'(m)=s''(m)$$
11	На рисунке  представлены график движения тела и касательная к графику в момент времени $t=m$. Определите по графику скорость движения тела в этот момент времени.	 $v(m)=s'(m)=\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{AB}{BC}$.
12	На рисунке  представлена зависимость скорости движения тела от времени. Определите по графику, сколько раз ускорение тела обращалось в 0.